MATEMÁTICA DISCRETA II – GII

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA JULIO

Apellidos..**Nombre**......................**nº mat.**......................

Observaciones:

- Sólo se valorarán las respuestas que estén justificadas correctamente.
- No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.

****

Ejercicio 1 (2 ptos.)

Una pirámide de Egipto tiene varias salas (A, B, C, D, E, F, G, H, I) y pasadizos que comunican unas salas con otras y con el exterior E de la pirámide. La comunicación entre salas y con el exterior, junto con el tiempo que se tarda en recorren el pasadizo de una sala a otra o de una sala al exterior viene representado por el grafo ponderado cuya matriz de pesos es la siguiente:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A		12		6		5		4	
B	12		7				8		2
C		7		7				5	
D	6		7		2				1
E				2		3			
F	5				3		6		15
G		8				6		3	
H	4		5				3		5
I		2		1		15		5	

A) Al final del entierro de un faraón, su sirviente más fiel sale de la cámara del faraón (sala A) para escapar al exterior antes de que se active el sellado de todas las cámaras. ¿Cuál es el menor tiempo posible que puede tardar en escapar al exterior (sala E)?
Describe el algoritmo que utilizas para calcular el recorrido óptimo.

B) Halla un árbol que comunique todas las salas entre sí cuyo peso total sea mínimo.

Solución

A) Para obtener el camino más corto del vértice A al vértice E aplicaremos el algoritmo de Dijkstra:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	S
A	(0, –)	(∞, –)	(∞, –)	(∞, –)	(∞, –)	(∞, –)	(∞, –)	(∞, –)	(∞, –)	{A}
A		(12, A)	(∞, –)	(6, A)	(∞, –)	(5, A)	(∞, –)	(4, A)	(∞, –)	{A, H }
H		(12, A)	(9,H)	(6, A)	(∞, –)	(5, A)	(7,H)		(9,H)	{A, H, F }
F		(12, A)	(9,H)	(6, A)	(8,F)		(7,H)		(9,H)	{A, H, F, D}
D		(12, A)	(9,H)		(8,F)		(7,H)		(7, D)	{A, H, F, D, G}
G		(12, A)	(9,H)		(8,F)				(7, D)	{A, H, F, D, G, I}
I		(9,I)	(9,H)		(8,F)					{A, H, F, D, G, I, E}

Una solución sería el camino de longitud 8 " A-F-E".

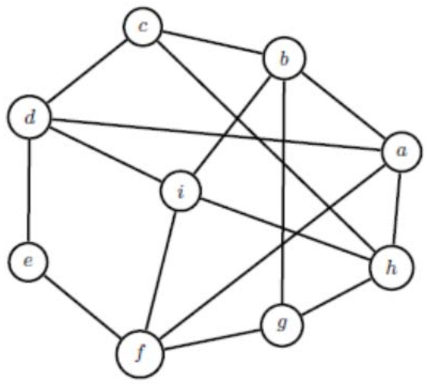
B) Un árbol que comunique todas las salas entre sí cuyo peso total sea mínimo es

T_1 = {DE, EF, FA, AH, HC, HG, DI, IB} o bien T_2 = {DE, EF, DI, IB, IH, HC, HA, HG}

El peso del AGM es 25.

Ejercicio 2 (3 ptos.)

Se considera el grafo G de la figura siguiente



A) Determina si es o no bipartido el grafo G construyendo, en caso afirmativo, la partición del conjunto de vértices.

B) ¿Es G un grafo hamiltoniano? Razona tu respuesta.

C) Halla el radio y el diámetro del grafo G. Indica una arista cuya eliminación del grafo G produce un subgrafo H de diámetro mayor que el diámetro de G.

D) Proporciona dos árboles generadores de G que no sean isomorfos.

E) Determina el índice de vértice-conectividad κ (G) y el índice de aristo-conectividad λ (G).

Añade al grafo G una arista para formar un grafo H que verifique κ (H) $\geq$ κ (G).

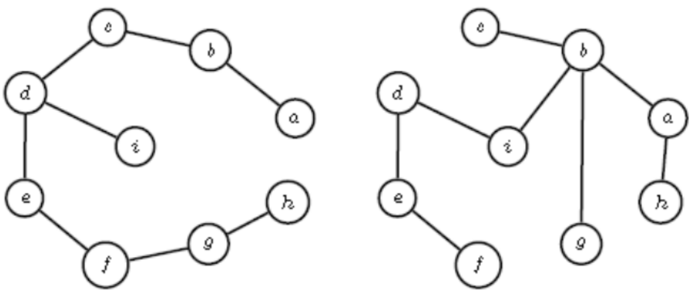
Solución

A) El grafo es bipartido siendo V_1 = {a, c, e, i, g} y V_2 = {b, d, h, f} la partición de vértices de modo que cada arista del grafo G tiene un extremo en V_1 y otro en V_2.

B) El grafo es bipartido y el cardinal de V_1 es distinto del cardinal de V_2, luego no se cumple una condición necesaria para que un grafo bipartido sea hamiltoniano.

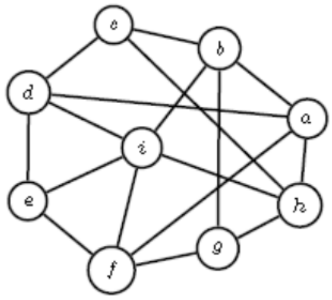
C) Se tiene rad (G) = 2 y diam (G) = 3. Si se elimina la arista {d, e} del grafo se obtiene un subgrafo cuyo diámetro es 4 puesto que un camino de longitud mínima en el subgrafo desde e hasta c tiene longitud 4, por ejemplo el camino con la secuencia de vértices [e, f, i, b, c].

D) Dos árboles generadores no isomorfos:



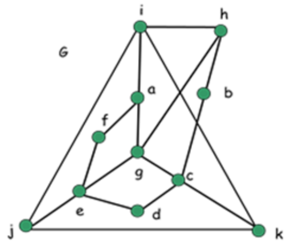
E) Se tiene que κ (G) = 2 puesto que G no tiene vértices-corte y al eliminar los vértices "f" y "d" se obtiene un subgrafo disconexo. Por otro lado, λ (G) = 2 puesto que G no tiene aristas-puente y al eliminar las aristas {e, f} y {e, d} se obtiene un subgrafo disconexo.

Si se añade la arista {e, i} se obtiene un grafo H tal que κ (H) = 3:



Ejercicio 3 (2,5 ptos.)

En el grafo G de la figura siguiente



A) Halla un conjunto independiente maximal de cardinal máximo y el número de independencia de G.

¿Cuál es la relación existente entre el número de independencia de G y el número cromático de G?

B) Colorea los vértices del grafo G aplicando el algoritmo de Brelaz y comprueba que se usan más colores que el número cromático de G, $\chi(G)$.

C) Halla en el grafo G un recorrido cerrado desde el vértice "a" que contenga a todas las aristas al menos una vez y que sea de peso mínimo, aplicando el algoritmo correspondiente.

(El peso de cada arista se considera igual a 1).

Solución

A) Aplicando el algoritmo de independencia se obtiene un conjunto maximal:

I = ∅ , V = [a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l], P = [b, d, f, a, h, j, k, c, e, g, i], en orden ascendente de grado

I = [b], P = [d, f, a, j, k, e, g, i], P = [d, f, g, k, a, i, j, e], en orden ascendente de grado

I = [b, d], P = [f, g, k, a, i, j], P = [f, g, j, k, a, i], en orden ascendente de grado

I = [b, d, f], P = [g, j, k, i], P = [g, i, j, k], en orden ascendente de grado

I = [b, d, f, g], P = [i, j, k]

I = [b, d, f, g, i] es un conjunto independiente maximal de cardinal máximo.

El número de independencia $\alpha(G) = 5$.

El número cromático $\chi(G) = 3$, puesto que {i, j, k} es un ciclo de longitud 3 y existe una coloración de G con 3 colores:

V	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**k**
Color	2	1	3	1	2	1	1	2	3	1	2

La relación existente entre ambos es:

$$3 = \chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} = \frac{11}{5}$$

B) Si $d_s(v)$ es el grado de saturación del vértice v, aplicamos el algoritmo de Brelaz

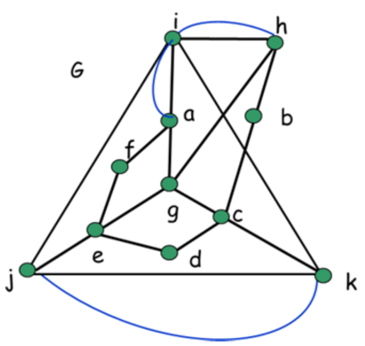
V	c	e	g	i	a	h	j	k	b	d	f
Color	1	1	2	2	1	1	3	4	2	2	2
d_s(v)			1					1	1	1	
d_s(v)		1			1	1		1	1	1	
d_s(v)					1	1	1	1	1	1	1
d_s(v)				1		1	1	1	1	1	1
d_s(v)						1	2	2	1	1	1
d_s(v)						1		3	1	1	1
d_s(v)						1			1	1	1
d_s(v)									1	1	1
d_s(v)										1	1
d_s(v)											1

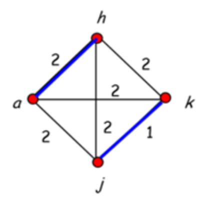
El algoritmo de Brelaz colorea con 4 colores.

C) Los vértices {a, h, j, k} son de grado impar, el grafo no es euleriano.

Con los vértices de grado impar se forma un grafo completo y se duplica el camino mínimo entre los vértices a y h y entre los vértices j y k.

El camino mínimo entre los vértices a y h puede ser [a, i, h] o [a, g, h].





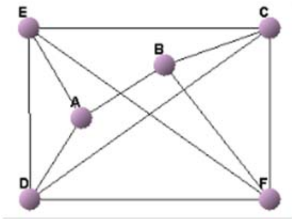
Recorrido euleriano cerrado C_E = [a, f, e, d, c, b, h, i, a, g, c, k, i, j, k, j, e, g, h, i, a]

Ejercicio 4 (2,5 ptos.)

A) Demuestra que si G es un grafo conexo, planar y simple con un número de vértices $n \geq 3$ y la longitud del ciclo mínimo es 5 entonces su número de aristas es $q \leq \frac{5(n-2)}{3}$.

B) Sea G un grafo planar y conexo con q = 50 aristas en el que el grado de los vértices d(v) verifica que $4 \leq d(v) \leq 5$. ¿Cuántas caras puede tener G en una representación plana del grafo?

C) Aplica el teorema de Kuratowski para demostrar que el grafo G de la figura siguiente no es planar.



Solución

A) Si la longitud del ciclo mínimo es 5 entonces el grado de cada región R de una representación plana de G es $d(R) \geq 5$, entonces

$$5c \leq \sum_R d(R) = 2q \quad \Rightarrow \quad c \leq \frac{2q}{5}$$

$$2 = n - q + c \leq n - q + \frac{2q}{5} = n - \frac{3}{5}q \Rightarrow q \leq \frac{5(n-2)}{3}$$

B) Si G es planar y conexo y $4 \leq d(v) \leq 5$, $\forall\, v \in V$, entonces

$$4n \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2q \;\leq\; 5n \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5}q \leq \; n \leq \frac{1}{2}q \quad \Rightarrow \quad 20 \leq \; n \leq \; 25$$

$$c = 2 - n + q \; = 52 - n \quad \Rightarrow \quad 27 \;\leq\; c \;\leq\; 32$$

C) El subgrafo $H = G - \{\text{arista } ED, \text{arista } CF\}$ de G es isomorfo a K_{33}. Por tanto G no es planar.